第 2 节 三角函数图象的变换（★★）

内容提要

本节归纳三角函数图象的平移、伸缩变换有关考题，先回顾一下平移、伸缩的规则.

1．平移（口诀：左加右减，上加下减）

$$\begin{cases} y=f(x)\xrightarrow[\text{将}x\text{替换成}x+a]{\text{向左平移}a\text{个单位}}y=f(x+a) \\ y=f(x)\xrightarrow[\text{将}x\text{替换成}x-a]{\text{向右平移}a\text{个单位}}y=f(x-a) \end{cases}\qquad \begin{cases} y=f(x)\xrightarrow[\text{解析式整体加}a]{\text{向上平移}a\text{个单位}}y=f(x)+a \\ y=f(x)\xrightarrow[\text{解析式整体减}a]{\text{向下平移}a\text{个单位}}y=f(x)-a \end{cases}$$

注意：左右平移的量是加在 x 上的，不是加在整个括号里的. 例如，将函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 右移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到的是 $y=\sin[2(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}]$，而不是 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})$；上下平移的量是加在整个解析式后面的.

2．伸缩

$$\begin{cases} y=f(x)\xrightarrow[\text{将}x\text{替换成}\frac{x}{2}]{\text{横坐标变为原来的2倍}}y=f(\frac{x}{2}) \\ y=f(x)\xrightarrow[\text{将}x\text{替换成}2x]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{2}\text{倍}}y=f(2x) \end{cases}\qquad \begin{cases} y=f(x)\xrightarrow[f(x)\text{前乘以}2]{\text{纵坐标变为原来的2倍}}y=2f(x) \\ y=f(x)\xrightarrow[f(x)\text{前乘以}\frac{1}{2}]{\text{纵坐标变为原来的}\frac{1}{2}\text{倍}}y=\frac{1}{2}f(x) \end{cases}$$

3．求解三角函数图象变换题，需要注意两点：

①化同名：当两个函数的函数名不同时，应先用诱导公式化同名，且化完后应保证 x 的系数正负一致.

②系数化“1”：例如求 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 和 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$ 之间的平移关系时，应把 x 前的系数 2 提出去，将 x 的系数化 1，即化为 $y=\sin 2(x+\frac{\pi}{6})$ 和 $y=\sin 2(x-\frac{\pi}{8})$，再来观察平移量.

典型例题

类型Ⅰ：平移变换问题

【例 1】要得到函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象，只需要将函数 $y=\sin 2x$ 的图象（　　）

（A）向左平移 $\frac{\pi}{8}$ （B）向右平移 $\frac{\pi}{8}$ （C）向左平移 $\frac{\pi}{4}$ （D）向右平移 $\frac{\pi}{4}$

解析： 先把系数化 1，以便于观察平移的量， $y=\sin(2x+\frac{\pi}{4})=\sin 2(x+\frac{\pi}{8})$，

所以在 $y=\sin 2x$ 中将 x 变成 $x+\frac{\pi}{8}$，即把 $y=\sin 2x$ 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，可得到 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象.

答案： A

【变式】为了得到函数 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象，需把 $y=\sin(\frac{\pi}{8}-2x)$ 的图象上所有点至少向右平移_____个

单位长度.

解析： 函数名不同，x 的系数符号也不同，先化为相同，可用 $\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ 来实现，

$y=\sin(\frac{\pi}{8}-2x)=\cos[\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{8}-2x)]=\cos(2x+\frac{3\pi}{8})=\cos 2(x+\frac{3\pi}{16})$，$y=\cos(2x+\frac{\pi}{4})=\cos 2(x+\frac{\pi}{8})$，

观察发现在 $y=\cos 2(x+\frac{3\pi}{16})$ 中将 x 换成 $x-\frac{\pi}{16}$ 可得到 $y=\cos 2(x+\frac{\pi}{8})$，

所以将 $y=\sin(\frac{\pi}{8}-2x)$ 的图象至少右移 $\frac{\pi}{16}$ 个单位，可得到 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象.

答案： $\frac{\pi}{16}$

【反思】 解决平移问题，先将前后式的 x 系数符号、三角函数名化为相同，再观察系数化 1 后平移的量.

类型Ⅱ：伸缩和平移综合变换

【例 2】将 $y=\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再把所得图象所有点的横坐标变为原来的一半，最后将所得图象向上平移 2 个单位，则得到的函数的解析式为_____.

解析： 右移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，在解析式中将 x 换成 $x-\frac{\pi}{6}$ 即可，这一步得到 $y=\sin[\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}]=\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$；

再将横坐标变为原来的一半，需把 x 换成 $2x$，得到 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$；

最后再上移 2 个单位，得到 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})+2$.

答案： $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})+2$

【变式 1】为了得到 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，需将 $y=\sin x$ 的图象进行怎样的变换？

解法 1： 先平移，再伸缩，将 $y=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到 $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})$ 的图象；

再将所得图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，即可得到 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象.

解法 2： 先伸缩，再平移，将 $y=\sin x$ 的图象所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，得到 $y=\sin 2x$ 的图象；

再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到 $y=\sin 2(x-\frac{\pi}{6})$，即 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象.

【变式 2】为了得到 $y=\tan(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，需将 $y=\tan x$ 的图象进行怎样的变换？

解法 1： 先平移，再伸缩，将 $y=\tan x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到 $y=\tan(x-\frac{\pi}{3})$ 的图象；

再将所得图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$倍，即可得到$y=\tan(2x-\frac{\pi}{3})$的图象.

解法 2：先伸缩，再平移，将$y=\tan x$的图象所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$倍，得到$y=\tan 2x$的图象；

再将所得图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到$y=\tan 2(x-\frac{\pi}{6})$，即$y=\tan(2x-\frac{\pi}{3})$的图象.

类型III：翻折变换

【例 3】将函数$f(x)=\sin(3x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的图象向左平移$\frac{2\pi}{9}$个单位长度后得到函数$g(x)$的图象，若$f(x)$与$g(x)$的图象关于$y$轴对称，则$\varphi=$（　　）

（A）$\frac{\pi}{3}$　　（B）$\frac{\pi}{6}$　　（C）$\frac{\pi}{9}$　　（D）$\frac{\pi}{12}$

解析：先求出$g(x)$的解析式，由题意，$g(x)=f(x+\frac{2\pi}{9})=\sin[3(x+\frac{2\pi}{9})+\varphi]=\sin(3x+\frac{2\pi}{3}+\varphi)$，

因为$f(x)$与$g(x)$的图象关于y轴对称，所以$g(x)=f(-x)$，从而$\sin(3x+\frac{2\pi}{3}+\varphi)=\sin(-3x+\varphi)$，

上式中x的系数相反，先把系数化为相同，且保持函数名不变，可用诱导公式$\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$实现，

因为$\sin(-3x+\varphi)=\sin[\pi-(-3x+\varphi)]=\sin(3x+\pi-\varphi)$，所以$\sin(3x+\frac{2\pi}{3}+\varphi)=\sin(3x+\pi-\varphi)$，

像$\sin(\omega x+\varphi_1)=\sin(\omega x+\varphi_2)(\omega\neq 0)$这种等式要恒成立，$\varphi_1$和$\varphi_2$之间一定相差的是$2\pi$的整数倍，

从而$(\frac{2\pi}{3}+\varphi)-(\pi-\varphi)=2k\pi$，故$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

答案：B

【总结】①将$f(x)$的图象沿y轴翻折，得到的是$f(-x)$图象，故$f(x)$和$f(-x)$关于y轴对称，如图 1；②将$f(x)$的图象沿x轴翻折，得到的是$-f(x)$的图象，所以$f(x)$和$f(-x)$关于x轴对称，如图 2.

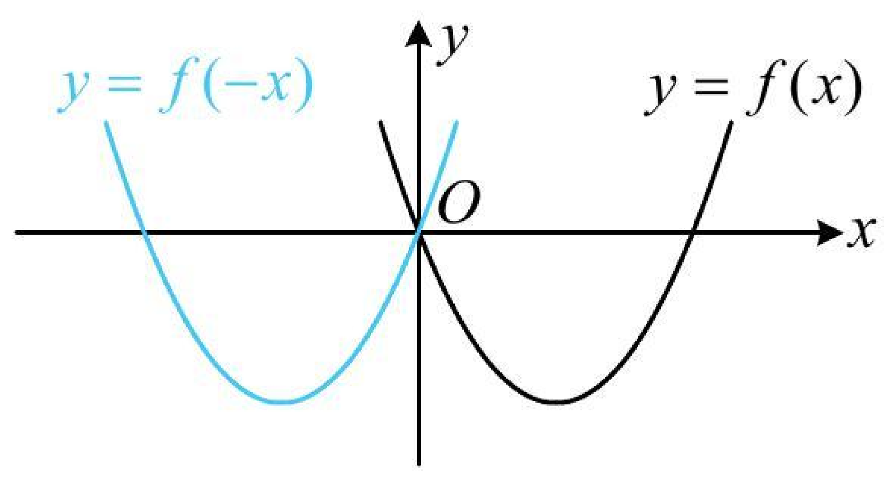

图1

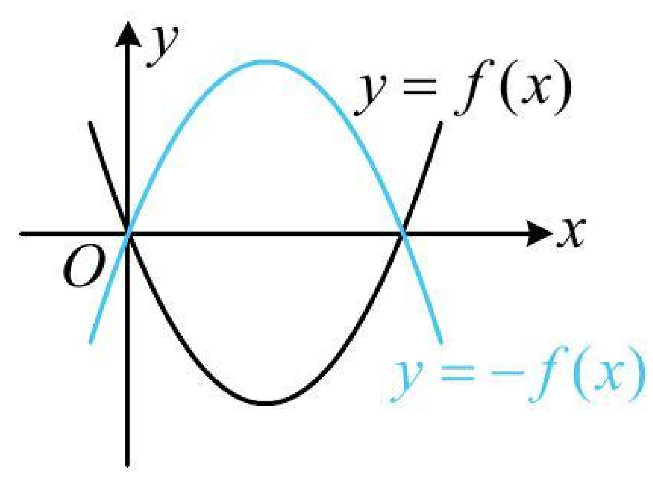

图2

强化训练

1.（2022•成都模拟•★）要得到函数$y=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$的图象，只需要将函数$y=\cos 2x$的图象（　　）

（A）向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位　　（B）向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位

（C）向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位　　（D）向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位

2．（2022•山西模拟•★★）为了得到函数 $y=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象，需把函数 $y=\sin 2x$ 的图象上的所有点至少向左平移_____个单位.

3．（2022•潍坊模拟•★★）为了得到函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象，需把 $y=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$ 的图象上所有点至少向右平移_____个单位.

4．（2022•河南模拟•★★★）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，且满足 $f(x+\varphi)=f(\varphi-x)$，则要得到函数 $f(x)$ 的图象，可将 $g(x)=\cos\omega x$ 的图象（　　）

（A）向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度　　（B）向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

（C）向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　（D）向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

5．（2022•厦门模拟•★★）将 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再向上平移两个单位，最后将所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，则所得的函数图象的解析式为（　　）

（A）$y=\sin(x+\frac{2\pi}{3})+2$　　（B）$y=\sin(4x-\frac{2\pi}{3})+2$　　（C）$y=\cos 4x+2$　　（D）$y=\sin(4x+\frac{2\pi}{3})+2$

6.（2022 • 南阳模拟 • ★★★）若将函数 $y=\tan(\omega x-\frac{\pi}{4})(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后，与函数 $y=\tan(\omega x-\frac{\pi}{3})$ 的图象重合，则 ω 的最小值为_____.

7.（2022 • 安徽模拟 • ★★★）（多选）为了得到 $y=2\tan(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，只需把 $y=2\tan(\frac{\pi}{4}-2x)$ 的图象（　　）

（A）先沿 x 轴翻折，再向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

（B）先沿 x 轴翻折，再向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位

（C）先沿 y 轴翻折，再向右平移 $\frac{7\pi}{24}$ 个单位

（D）先沿 y 轴翻折，再向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位

8.（2022 • 石嘴山模拟 • ★★★）已知 $f(x)=\sin x+\cos x$，设 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则下列结论错误的是（　　）

（A）将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，可得到 $f'(x)$ 的图象

（B）将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{2}$ 个单位，可得到 $f'(x)$ 的图象

（C）$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

（D）$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的图象关于 y 轴对称

9.（2022 • 山西三模 • ★★★）将曲线 $C:y=\sin 2x+\cos 2x$ 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到曲线 C_1，将曲线 C 向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度得到曲线 C_2，若 C_1 与 C_2 关于 x 轴对称，则 φ 的最小值为（　　）

（A）$\frac{\pi}{4}$　　（B）$\frac{\pi}{2}$　　（C）$\frac{2\pi}{3}$　　（D）$\frac{3\pi}{4}$